ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 1 2014
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.987.4+519.6

Э. А. АЙРЯН[1], *В. Б. МАЛЮТИН*[2]

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

[1] *Объединенный институт ядерных исследований* (*Дубна, Россия*)
[2] *Институт математики НАН Беларуси*

(*Поступила в редакцию 16.07.2013*)

Введение. Один из классов функционалов, важных в функциональном интегрировании, это функциональные многочлены произвольной заданной степени. Одним из подходов к приближенному вычислению функциональных интегралов служит использование приближенных формул, являющихся точными на классе функциональных многочленов заданной степени [1–3]. Если значения интеграла от функциональных многочленов известны, то для приближенного вычисления интеграла можно использовать аппроксимацию исходного подинтегрального функционала функциональными многочленами. Подход с использованием функциональных многочленов применяется для разнообразных типов функциональных интегралов, обусловленных разнообразием пространств, мер и способом их задания. В данной статье рассматривается применение функциональных многочленов к приближенному вычислению матричнозначных функциональных интегралов, порожденных решениями уравнения Дирака. Такие функциональные интегралы широко используются в релятивистской теории, описывающей движение частицы в электромагнитном поле [4, 5].

В работе рассматривается вычисление матричнозначного функционального интеграла с помощью разложения функционала в ряд, члены которого имеют вид произведения линейных функционалов с возрастающей суммарной степенью. Исследуется сходимость этого ряда для некоторых функционалов.

Для некоторых типов функциональных интегралов, в частности для интегралов по гауссовым мерам, ряд из интегралов от произведения линейных функционалов с возрастающей суммарной степенью сходится для очень узкого класса функционалов. Для рассматриваемых матричнозначных интегралов в силу присущих им специфических свойств ряд из интегралов от произведения линейных функционалов сходится для широкого класса функционалов. Поэтому метод вычисления интегралов, основанный на разложении функционала в ряд, является эффективным в случае матричнозначных функциональных интегралов, порожденных решениями уравнения Дирака.

Рассматривается разложение при малых и больших значениях параметров, которые входят в интегрируемый функционал и переходную функцию, определяющую функциональный интеграл.

1. Аппроксимация интеграла и исследование сходимости. Следуя работам [4, 5], матричнозначный функциональный интеграл будем рассматривать на пространстве функций $x(\tau)$, $s \le \tau \le t$, удовлетворяющих условию $x(s) = 0$ и условию Липшица с порядком, равным единице, т. е. для любых $s \le a < b \le t$, $|x(b) - x(a)| \le M\,|b - a|$. Интеграл определяется равенством

$$\int F\big(x(\cdot)\big)\,d\mu(x) = \lim_{\max\limits_j \Delta t_j \to 0} \int_R (n) \dots \int_R F\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{]t_{j-1}, t_j]}(\cdot)\right) \prod_{j=n}^{1} S\big(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}\big)\,dx_1 \dots dx_n, \qquad (1)$$

если этот предел существует для любого разбиения отрезка $[s, t]$ точками $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$.

Здесь $x_j = x(t_j)$; $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$, $\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)$ – характеристическая функция интервала $]t_{j-1}, t_j]$; $S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1})$ – переходная функция, являющаяся фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} = a\alpha \frac{\partial S(t,x)}{\partial x} + b\beta S(t,x), \tag{2}$$

где a, b – вещественные параметры, α, β – антикоммутирующие величины (операторы или матрицы), т. е. $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$. Мы также предполагаем, что $\alpha^2 = \beta^2 = E$, E – единичная матрица или оператор.

В данной работе рассматривается метод приближенного вычисления указанных интегралов от цилиндрических функционалов с помощью разложения интегрируемого функционала в ряд. Разложение имеет вид

$$F\left(x(\cdot)\right) = F\left(\int_s^t f_1(\tau)dx(\tau),...,\int_s^t f_d(\tau)dx(\tau)\right) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} F_{n_1,...,n_d} \prod_{k=1}^{d} \left(\int_s^t f_k(\tau)dx(\tau)\right)^{n_k}, \tag{3}$$

где $F_{n_1,...,n_d}$ – коэффициенты разложения, принимающие вещественные значения.

Т е о р е м а. *Пусть функции* $f_k(\tau)$, $1 \le k \le d$ *интегрируемы по Риману на отрезке* $[s,t]$. *Пусть функция* $F(u_1,...,u_d)$ *допускает разложение в ряд* $\sum\limits_{n_1,...,n_d=0}^{\infty} F_{n_1,...,n_d} u_1^{n_1} \cdots u_d^{n_d}$, *ряд* $\sum\limits_{n_1,...,n_d=0}^{\infty} |F_{n_1,...,n_d}|\,|a|^N c_1^{n_1} \cdots c_d^{n_d}$ *сходится для некоторых* $c_k > \int_s^t |f_k(\tau)|\,d\tau$, $1 \le k \le d$ *и его сумма равна S. Тогда*

$$\int F\left(\int_s^t f_1(\tau)dx(\tau),...,\int_s^t f_d(\tau)dx(\tau)\right)d\mu(x) =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} F_{n_1,...,n_d} \int_s^t \underset{\cdots}{\int} (N) \int_s^t \prod_{k=1}^{d} \prod_{j=1}^{n_k} f_k(\tau_{kj}) \prod_{k=1}^{d} \prod_{j=1}^{n_k} dx(\tau_{kj}) d\mu(x) = \tag{4}$$

$$= \sum_{n_1,...,n_d=0}^{\infty} F_{n_1,...,n_d} (-a)^N \int_s^t (N) \int_s^t \prod_{k=1}^{N} g_k(\tau_k) \prod_{k=0}^{N} \exp\left\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\right\} d\tau_1 .. d\tau_N \alpha^N$$

и ряд в равенстве (4) *сходится.*

Здесь $N = n_1 + ... + n_d$, $g_i(\tau) = f_k(\tau)$, $\sum\limits_{m=0}^{k-1} n_m \le i < \sum\limits_{m=0}^{k} n_m$, $1 \le k \le d$, $n_0 = 1$, $(m_1,...,m_N)$ – *перестановка чисел* $(1,...,N)$ *такая, что* $\tau_{m_1} \ge \tau_{m_2} \ge ... \ge \tau_{m_N}$, $\tau_{m_0} = t$, $\tau_{m_{N+1}} = s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения матричнозначного интеграла следует, что

$$I = \int F\left(\int_s^t f_1(\tau)dx(\tau),...,\int_s^t f_d(\tau)dx(\tau)\right)d\mu(x) =$$

$$= \lim_{\max\limits_j \Delta t_j \to 0} \int_R (n) \underset{\cdots}{} \int_R F\left(\sum_{j=1}^{n} f_1(t_{j-1})(x_j - x_{j-1}),...,\sum_{j=1}^{n} f_d(t_{j-1})(x_j - x_{j-1})\right) \prod_{j=n}^{1} S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}) dx_1 ... dx_n.$$

Используя замену переменных $x_j - x_{j-1} = y_j$, $1 \le j \le n$, и то, что преобразование Фурье функции $S(t_j - t_{j-1}, y_j)$ равно $\exp\{(t_j - t_{j-1})(-ia\alpha z_j + b\beta)\}$, получим

$$I = \lim_{\max\limits_j \Delta t_j \to 0} \int_R (n) \underset{\cdots}{} \int_R \overset{\vee}{F}\left(\sum_{j=1}^{n} f_1(t_{j-1})z_j,...,\sum_{j=1}^{n} f_d(t_{j-1})z_j\right) \prod_{j=n}^{1} \exp\left\{(t_j - t_{j-1})(-ia\alpha z_j + b\beta)\right\} dz_1 ... dz_n, \tag{5}$$

где $\overset{\vee}{F}$ обозначает обратное преобразование Фурье функции F.

Используя равенство

$$\exp\left\{-(t_j - t_{j-1})ia\alpha z_j\right\} = \sum_{\xi_j=\pm1} \frac{1}{2}\Big(\exp\left\{-(t_j - t_{j-1})iaz_j\right\} + \xi_j \exp\left\{(t_j - t_{j-1})iaz_j\right\}\Big)\alpha^{\frac{1-\xi_j}{2}},$$

верное в случае $\alpha^2 = E$, получаем

$$\prod_{j=n}^{1}\Big[\exp\left\{-(t_j - t_{j-1})ia\alpha z_j\right\}\exp\left\{(t_j - t_{j-1})b\beta\right\}\Big] =$$

$$= \sum_{\xi_1=\pm1}\cdots\sum_{\xi_n=\pm1}\prod_{j=n}^{1}\left[\frac{1}{2}\Big(\exp\left\{-(t_j - t_{j-1})iaz_j\right\} + \xi_j \exp\left\{(t_j - t_{j-1})iaz_j\right\}\Big)\alpha^{\frac{1-\xi_j}{2}}\exp\left\{(t_j - t_{j-1})b\beta\right\}\right].$$

В данном произведении множители, содержащие α, чередуются с множителями, содержащими β. Учитывая правило антикоммутации α и β, расположим каждый множитель, содержащий β, слева от всех множителей, содержащих α. Получим:

$$\prod_{j=n}^{1}\Big[\exp\left\{-(t_j - t_{j-1})ia\alpha z_j\right\}\exp\left\{(t_j - t_{j-1})b\beta\right\}\Big] =$$

$$= \sum_{\xi_1=\pm1}\cdots\sum_{\xi_n=\pm1}\prod_{j=n}^{1}\frac{1}{2}\Big(\exp\left\{-(t_j - t_{j-1})iaz_j\right\} + \xi_j \exp\left\{(t_j - t_{j-1})iaz_j\right\}\Big)\times$$

$$\times\prod_{j=n}^{1}\exp\left\{(t_j - t_{j-1})\left(\prod_{l=n}^{j}\xi_l\right)b\beta\right\}\prod_{j=n}^{1}\alpha^{\frac{1-\xi_j}{2}}.$$

Сделаем замену переменных

$$\xi_1 = \eta_1\eta_2,\ \xi_2 = \eta_2\eta_3, \ldots,\ \xi_n = \eta_n.$$

Обратная замена переменных имеет вид

$$\eta_n = \xi_n,\ \eta_{n-1} = \xi_{n-1}\xi_n, \ldots,\ \eta_1 = \xi_1\cdots\xi_n.$$

Получим следующее равенство:

$$\prod_{j=n}^{1}\Big[\exp\left\{-(t_j - t_{j-1})ia\alpha z_j\right\}\exp\left\{(t_j - t_{j-1})b\beta\right\}\Big] =$$

$$= \sum_{\eta_1=\pm1}\cdots\sum_{\eta_n=\pm1}\prod_{j=n}^{1}\frac{1}{2}\Big(\exp\left\{-(t_j - t_{j-1})iaz_j\right\} + \eta_j\eta_{j+1} \exp\left\{(t_j - t_{j-1})iaz_j\right\}\Big)\times$$

$$\times\prod_{j=n}^{1}\exp\left\{(t_j - t_{j-1})\eta_j b\beta\right\}\prod_{j=n}^{1}\alpha^{\frac{1-\eta_j\eta_{j+1}}{2}},$$

где $\eta_{n+1} = 1$.

Подставим полученное выражение в (5) и воспользуемся равенством

$$\prod_{j=n}^{1}\alpha^{\frac{1-\eta_j\eta_{j+1}}{2}} = \alpha^{\frac{1-\eta_1\eta_{n+1}}{2}} = \alpha^{\frac{1-\eta_1}{2}}.$$

Получаем

$$I = \lim_{\max_j \Delta t_j\to 0}(n)\int_R \ldots \int_R \overset{\vee}{F}\left(\sum_{j=1}^{n} f_1(t_{j-1})z_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} f_d(t_{j-1})z_j\right)\times$$

$$\times\sum_{\eta_1=\pm1}\cdots\sum_{\eta_n=\pm1}\prod_{j=n}^{1}\frac{1}{2}\Big(\exp\left\{-(t_j - t_{j-1})iaz_j\right\} + \eta_j\eta_{j+1} \exp\left\{(t_j - t_{j-1})iaz_j\right\}\Big)\times \tag{6}$$

$$\times\prod_{j=n}^{1}\exp\left\{(t_j - t_{j-1})\eta_j b\beta\right\}\alpha^{\frac{1-\eta_1}{2}}dz_1\ldots dz_n.$$

Подставляя правую часть равенства

$$\exp\{-(t_j-t_{j-1})iaz_j\}+\eta_j\eta_{j+1}\exp\{(t_j-t_{j-1})iaz_j\}=\sum_{v_j=\pm1}\exp\{-(t_j-t_{j-1})iaz_jv_j\}(\eta_j\eta_{j+1})^{\frac{1-v_j}{2}}$$

в (6) и вычисляя интегралы по переменным $z_1,\dots,z_n$, получим

$$I=\lim_{\max\limits_j\Delta t_j\to0}\sum_{\eta_1=\pm1}\cdots\sum_{\eta_n=\pm1}\sum_{v_1=\pm1}\cdots\sum_{v_n=\pm1}\prod_{j=n}^{1}\frac{1}{2}(\eta_j\eta_{j+1})^{\frac{1-v_j}{2}}\times$$
$$\times F\left(-\sum_{j=1}^{n}f_1(t_{j-1})(t_j-t_{j-1})av_j,\dots,-\sum_{j=1}^{n}f_d(t_{j-1})(t_j-t_{j-1})av_j\right)\prod_{j=n}^{1}\exp\{(t_j-t_{j-1})\eta_jb\beta\}\alpha^{\frac{1-\eta_1}{2}}. \quad (7)$$

Используем разложение $F(u_1,\dots,u_d)=\sum\limits_{n_1,\dots,n_d=0}^{\infty}F_{n_1,\dots,n_d}u_1^{n_1}\cdots u_d^{n_d}$, которое по условию теоремы сходится при $u_k=|a|c_k$, $1\le k\le d$. Так как $c_k>\int\limits_s^t|f_k(\tau)|d\tau$, $1\le k\le d$, то это разложение сходится и при $u_k=|a|\int\limits_s^t|f_k(\tau)|d\tau$, $1\le k\le d$, и при $u_k=|a|\sum\limits_{j=1}^{n}|f_k(t_{j-1})||t_j-t_{j-1}|$, $1\le k\le d$. Поменяем местами знак $\sum\limits_{n_1,\dots,n_d=0}^{\infty}$ и знак $\sum\limits_{v_j=\pm1}$. Тогда формула (7) запишется в виде

$$I=\lim_{\max\limits_j\Delta t_j\to0}\sum_{\eta_1=\pm1}\cdots\sum_{\eta_n=\pm1}\sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{\infty}F_{n_1,\dots,n_d}\sum_{v_1=\pm1}\cdots\sum_{v_n=\pm1}\prod_{j=n}^{1}\frac{1}{2}(\eta_j\eta_{j+1})^{\frac{1-v_j}{2}}(-a)^N\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{n}f_k(t_{j-1})(t_j-t_{j-1})v_j\right)^{n_k}\prod_{j=n}^{1}\exp\{(t_j-t_{j-1})\eta_jb\beta\}\alpha^{\frac{1-\eta_1}{2}}. \quad (8)$$

С учетом обозначения $g_i(\tau)=f_k(\tau)$, $\sum\limits_{m=0}^{k-1}n_m\le i<\sum\limits_{m=0}^{k}n_m$, $1\le k\le d$, $n_0=1$ равенство (8) имеет вид

$$I=\lim_{\max\limits_j\Delta t_j\to0}\sum_{\eta_1=\pm1}\cdots\sum_{\eta_n=\pm1}\sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{\infty}F_{n_1,\dots,n_d}\sum_{v_1=\pm1}\cdots\sum_{v_n=\pm1}\prod_{j=n}^{1}\frac{1}{2}(\eta_j\eta_{j+1})^{\frac{1-v_j}{2}}(-a)^N\times$$
$$\times\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_N=1}^{n}\prod_{k=1}^{N}g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k}-t_{j_k-1})v_{j_k}\prod_{j=n}^{1}\exp\{(t_j-t_{j-1})\eta_jb\beta\}\alpha^{\frac{1-\eta_1}{2}}.$$

Представим множество $\{j_k,\ 1\le k\le N\}$ в виде объединения множеств J_l, $1\le l\le L$, где множество J_l состоит из чисел j_k, которые равны между собой и равны i_l. Все i_l, $1\le l\le L$, имеют разные значения и $i_1<i_2<\dots<i_L$. Число элементов в множестве J_l равно p_l. Тогда, выполняя суммирование по $v_1,\dots,v_n$, получаем равенство

$$I=\lim_{\max\limits_j\Delta t_j\to0}\sum_{\eta_1=\pm1}\cdots\sum_{\eta_n=\pm1}\sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{\infty}F_{n_1,\dots,n_d}(-a)^N\times$$
$$\times\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_N=1}^{n}\prod_{j=n,j\ne j_k}^{1}\frac{1}{2}(1+\eta_j\eta_{j+1})\prod_{l=1}^{L}\frac{1}{2}(1+(-1)^{p_l}\eta_{i_l}\eta_{i_l+1})\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{N}g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k}-t_{j_k-1})\prod_{j=n}^{1}\exp\{(t_j-t_{j-1})\eta_jb\beta\}\alpha^{\frac{1-\eta_1}{2}}.$$

В данной формуле функциональный интеграл представляется в виде суммы по конфигурациям, задаваемым всевозможными наборами чисел $(\eta_1,\dots,\eta_n)$, $\eta_j=\pm1$, $1\le j\le n$. При этом представлении ненулевой вклад в значение интеграла дает только одна конфигурация $\eta_j = \eta_{j+1}$, $j \neq j_k$, $\eta_j = (-1)^{p_l}\eta_{j+1}$, $j = i_l$, $1 \le l \le L$. То есть $\eta_n = \eta_{n-1} = ... = \eta_{i_L+1} = 1$, $\eta_{i_L} = \eta_{i_L-1} = ... = \eta_{i_{L-1}+1} = (-1)^{p_L}$,..., $\eta_{i_1} = \eta_{i_1-1} = ... = \eta_1 = (-1)^{p_L} \cdots (-1)^{p_1}$. Таким образом, значение интеграла равно значению суммы на этой единственной конфигурации.

Следовательно, после суммирования по η_1,..., η_n получаем равенство

$$I = \lim_{\max_j \Delta t_j \to 0} \sum_{n_1,...,n_d=0}^{\infty} F_{n_1,...,n_d}(-a)^N \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_N=1}^{n} \times \tag{9}$$

$$\times \prod_{k=1}^{N} g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_k-1}) \prod_{k=0}^{N} \exp\{(t_{j_{m_k}} - t_{j_{m_{k+1}}})(-1)^k b\beta\}\alpha^N,$$

где $(m_1,...,m_N)$ – перестановка чисел $(1,...,N)$ такая, что $j_{m_1} \ge j_{m_2} \ge ... \ge j_{m_N}$, $t_{j_{m_0}} = t$, $t_{j_{m_{N+1}}} = s$.

Из условия существования интегралов $\int_s^t f_k(\tau)d\tau$, $1 \le k \le d$, следует, что существует

$$\lim_{\max_j \Delta t_j \to 0} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_N=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_k-1}) \prod_{k=0}^{N} \exp\{(t_{j_{m_k}} - t_{j_{m_{k+1}}})(-1)^k b\beta\} \tag{10}$$

и равен

$$\int_s^t (N) \int_s^t \prod_{k=1}^{N} g_k(\tau_k) \prod_{k=0}^{N} \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 ... d\tau_N,$$

где $\tau_{m_1} \ge \tau_{m_2} \ge ... \ge \tau_{m_N}$, $\tau_{m_0} = t$, $\tau_{m_{N+1}} = s$.

Из условия существования интегралов $\int_s^t f_k(\tau)d\tau$, $1 \le k \le d$, и неравенств $c_k > \int_s^t |f_k(\tau)|d\tau$, $1 \le k \le d$, следует, что существует такое $\overline{n_1}$, что для всех $n \ge \overline{n_1}$

$$\left\| \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_N=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_k-1}) \prod_{k=0}^{N} \exp\{(t_{j_{m_k}} - t_{j_{m_{k+1}}})(-1)^k b\beta\} \right\| \le \exp\{t|b|\|\beta\|\} \prod_{k=1}^{d} c_k{}^{n_k}. \tag{11}$$

Из неравенств $c_k > \int_s^t |f_k(\tau)|d\tau$, $1 \le k \le d$, и сходимости ряда $\sum_{n_1,...,n_d=0}^{\infty} |F_{n_1,...,n_d}||a|^N c_1^{n_1} \cdots c_d^{n_d}$ следует, что для любого малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\overline{n}$, что для всех $n_j \ge \overline{n}$, $1 \le j \le d$,

$$\left\| \sum_{n_1,...,n_d=\overline{n}}^{\infty} F_{n_1,...,n_d}(-a)^N \int_s^t (N) \int_s^t \prod_{k=1}^{N} g_k(\tau_k) \prod_{k=0}^{N} \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 ... d\tau_N \alpha^N \right\| \le$$

$$\le \sum_{n_1,...,n_d=\overline{n}}^{\infty} |F_{n_1,...,n_d}||a|^N \exp\{t|b|\|\beta\|\} c_1^{n_1} \cdots c_d^{n_d} \overline{\alpha} < \varepsilon \exp\{t|b|\|\beta\|\}\overline{\alpha}, \tag{12}$$

где $\overline{\alpha} = \max\{\|E\|, \|\alpha\|\}$.

Из неравенства (11) и сходимости ряда $\sum_{n_1,...,n_d=0}^{\infty} |F_{n_1,...,n_d}||a|^N c_1^{n_1} \cdots c_d^{n_d}$ следует, что для любого малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\overline{n}$, что для всех $n_j \ge \overline{n}$, $1 \le j \le d$, и $n \ge \overline{n_1}$

$$\left\| \sum_{n_1,...,n_d=\overline{n}}^{\infty} F_{n_1,...,n_d}(-a)^N \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_N=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_k-1}) \prod_{k=0}^{N} \exp\{(t_{j_{m_k}} - t_{j_{m_{k+1}}})(-1)^k b\beta\}\alpha^N \right\| \le$$

$$\le \sum_{n_1,...,n_d=\overline{n}}^{\infty} |F_{n_1,...,n_d}||a|^N \exp\{t|b|\|\beta\|\} c_1^{n_1} \cdots c_d^{n_d} \overline{\alpha} < \varepsilon \exp\{t|b|\|\beta\|\}\overline{\alpha}. \tag{13}$$

Из существования предела (10) следует, что для $\overline{n}$ существует такое $\overline{n_2}$, что для всех $n \ge \overline{n_2}$

$$\Bigg\| \sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{\overline{n}} F_{n_1,\dots,n_d} (-a)^N \left(\int_s^t (N) \int_s^t \prod_{k=1}^N g_k(\tau_k) \prod_{k=0}^N \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_N - \right.$$

$$\left. - \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_N=1}^{n} \prod_{k=1}^N g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_k-1}) \prod_{k=0}^N \exp\{(t_{j_{m_k}} - t_{j_{m_{k+1}}})(-1)^k b\beta\} \right) \alpha^N \Bigg\| \le$$

$$\le \sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{\overline{n}} | F_{n_1,\dots,n_d} \| a |^N \, \varepsilon c_1^{n_1} \cdots c_d^{n_d} \overline{\alpha} \le \varepsilon S \overline{\alpha}. \qquad (14)$$

Из неравенств (12)–(14) следует, что для $n \ge \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$

$$\Bigg\| \sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{\infty} F_{n_1,\dots,n_d} (-a)^N \int_s^t (N) \int_s^t \prod_{k=1}^N g_k(\tau_k) \prod_{k=0}^N \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_N \alpha^N -$$

$$- \sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{\infty} F_{n_1,\dots,n_d} (-a)^N \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_N=1}^{n} \prod_{k=1}^N g_k(t_{j_k-1})(t_{j_k} - t_{j_k-1}) \prod_{k=0}^N \exp\{(t_{j_{m_k}} - t_{j_{m_{k+1}}})(-1)^k b\beta\} \alpha^N \Bigg\| \le$$

$$\le \varepsilon \exp\{t |b| \|\beta\|\} \overline{\alpha} + \varepsilon S \overline{\alpha} + \varepsilon \exp\{t |b| \|\beta\|\} \overline{\alpha} = \varepsilon (2 \exp\{t |b| \|\beta\|\} + S) \overline{\alpha}.$$

Следовательно, существует предел в формуле (9) и его значение равно

$$\sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{\infty} F_{n_1,\dots,n_d} (-a)^N \int_s^t (N) \int_s^t \prod_{k=1}^N g_k(\tau_k) \prod_{k=0}^N \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_N \alpha^N. \qquad (15)$$

Из приведенного доказательства следует, что значение

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} F_{n_1,\dots,n_d} \int \int_s^t (N) \underset{\cdots}{} \int_s^t \prod_{k=1}^d \prod_{j=1}^{n_k} f_k(\tau_{kj}) \prod_{k=1}^d \prod_{j=1}^{n_k} dx(\tau_{kj}) d\mu(x)$$

также равно (15). То есть теорема доказана.

2. Интегралы, содержащие малый и большой параметры. Из вида разложения (4) следует, что удобно использовать разложение (4) для приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при малых значениях параметра a. В качестве примера рассмотрим вычисление матричнозначного функционального интеграла

$$\int \exp\left\{ \int_s^t \lambda(\tau) dx(\tau) \right\} d\mu(x).$$

Используя разложение (4), получаем:

$$\int \exp\left\{ \int_s^t \lambda(\tau) dx(\tau) \right\} d\mu(x) =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!} (-a)^{n_1} \int_s^t (n_1) \int_s^t \prod_{k=1}^{n_1} \lambda(\tau_k) \prod_{k=0}^{n_1} \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_{n_1} \alpha^{n_1} = \qquad (16)$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} (-a)^{n_1} \int_s^t (n_1) \int_{\tau_3}^t \int_{\tau_2}^t \prod_{k=1}^{n_1} \lambda(\tau_k) \exp\{(t - 2\tau_1 + 2\tau_2 - \dots + (-1)^{n_1} 2\tau_{n_1} - (-1)^{n_1} s) b\beta\} d\tau_1 \dots d\tau_{n_1} \alpha^{n_1}.$$

Если в разложении использовать многочлены нулевой и первой степени, т. е. взять в правой части равенства (16) первые два слагаемых ($a_1 = 0{,}1$), получим

$$\int \exp\left\{ \int_s^t \lambda(\tau) dx(\tau) \right\} d\mu(x) \approx \exp\{(t-s) b\beta\} - a \int_s^t \lambda(\tau) \exp\{(t - 2\tau + s) b\beta\} d\tau \alpha. \qquad (17)$$

Точное значение при $a = 0{,}1;\ b = 1;\ t = 2;\ s = 1;\ \lambda \equiv 1; \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ равно $\begin{pmatrix} 1{,}431 & 1{,}177 \\ 1{,}177 & 1{,}667 \end{pmatrix}$.

Если в разложении учитывать многочлены только нулевой степени, то получим приближенное значение $\mathrm{ch}(b(t-s))E + \mathrm{sh}(b(t-s))\beta = \begin{pmatrix} 1{,}543 & 1{,}175 \\ 1{,}175 & 1{,}543 \end{pmatrix}$.

Если в разложении учитывать многочлены нулевой и первой степени, то получим приближенное значение

$$\mathrm{ch}(b(t-s))E + \mathrm{sh}(b(t-s))\beta - \frac{a\lambda}{b}\mathrm{sh}(b(t-s))\alpha = \begin{pmatrix} 1{,}426 & 1{,}175 \\ 1{,}175 & 1{,}661 \end{pmatrix}.$$

Разложение (4) также удобно использовать для приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при больших значениях параметра b. Пусть $\left|f_k(\tau)\right| \le C,\ 1 \le k \le d$. Тогда кратные интегралы в формуле (4) можно оценить величиной

$$C^N \int_s^t (N) \int_s^t \prod_{k=0}^{N} \left\| \exp\{(\tau_{m_k} - \tau_{m_{k+1}})(-1)^k b\beta\} \right\| d\tau_1 \ldots d\tau_N \le$$

$$\le C^N N! \left\| \exp\{-b\beta t\} \right\| \int_s^t (N) \int_{\tau_3}^t \int_{\tau_2}^t \exp\{(2t - 2\tau_1 + 2\tau_2 - \ldots + 2(-1)^N \tau_N - (-1)^N s)\left\| b\beta \right\|\} d\tau_1 \ldots d\tau_N.$$

После вычисления интегралов по $d\tau_1 d\tau_2$ получим оценку

$$C^N N! \left\| e^{-b\beta t} \right\| \frac{t}{2\left\| b\beta \right\|} \int_s^t (N-2) \int_{\tau_5}^t \int_{\tau_4}^t \exp\{(2t - 2\tau_3 + 2\tau_N - \ldots + 2(-1)^N \tau_N - (-1)^N s)\left\| b\beta \right\|\} d\tau_3 \ldots d\tau_N.$$

Далее, вычисляя интегралы по $d\tau_3 \ldots d\tau_N$, придем к оценке

$$C^N N! \left\| e^{-b\beta t} \right\| \frac{t}{2\left\| b\beta \right\|} \exp\{(2t - s)\left\| b\beta \right\|\} H,$$

где $H = \left(\frac{t}{2\left\| b\beta \right\|} \right)^{\frac{N}{2}}$, если N четно, $H = \frac{1}{2\left\| b\beta \right\|} \left(\frac{t}{2\left\| b\beta \right\|} \right)^{\frac{N-1}{2}}$, если N нечетно.

Из вида константы H следует, что разложение (4) удобно использовать для приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при больших значениях параметра b.

В качестве примера рассмотрим вычисление матричнозначного функционального интеграла

$$\int \exp\left\{ \int_s^t \lambda(\tau) dx(\tau) \right\} d\mu(x).$$

Если в разложении использовать многочлены нулевой и первой степени, то этот интеграл можно вычислить по приближенной формуле (17).

Точное значение при $a = 1;\ b = 10;\ t = 2;\ s = 1;\ \lambda \equiv 1; \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ равно $\begin{pmatrix} 10414{,}2 & 11507{,}3 \\ 11507{,}3 & 12715{,}6 \end{pmatrix}$.

Если в разложении учитывать многочлены только нулевой степени, то получим приближенное значение $\mathrm{ch}(b(t-s))E + \mathrm{sh}(b(t-s))\beta = \begin{pmatrix} 11014{,}2 & 11014{,}1 \\ 11014{,}1 & 11014{,}2 \end{pmatrix}$.

Если в разложении учитывать многочлены нулевой и первой степени, то получим приближенное значение

$$\mathrm{ch}(b(t-s))E + \mathrm{sh}(b(t-s))\beta - \frac{a\lambda}{b}\mathrm{sh}(b(t-s))\alpha = \begin{pmatrix} 9912{,}8 & 11014{,}1 \\ 11014{,}1 & 12115{,}6 \end{pmatrix}.$$

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф12Д-001).

Литература

1. *Егоров А. Д., Соболевский П. И., Янович Л. А.* Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Минск, 1985.

2. *Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A.* Functional integrals: Approximate evaluation and Applications. Dordrecht, 1993.

3. *Егоров А. Д., Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю.* Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. М., 2006.

4. *Ichinose T., Tamura H.* // J. Math. Phys. 1984. Vol 25, N. 6. P. 1810–1819.

5. *Ichinose T., Tamura H.* // J. Math. Phys. 1988. Vol. 29, N. 1. P. 103–109.

E. A. AYRYAN, V. B. MALYUTIN

EVALUATION OF MATRIX-VALUED FUNCTIONAL INTEGRALS USING FUNCTIONAL POLYNOMIALS

Summary

The method of approximate evaluation of matrix-valued functional integrals, generated by the solution of the Dirac equation is proposed. The method is based on the expansion of the functional in a series. The terms of the series have the form of a product of linear functionals with an increasing total power. The convergence of this series for a wide class of functionals is proved.